Teoría de Wavelets y Aplicaciones

Harold A. Ramo. R.
Profesor Asociado Departamento de Telecomunicaciones
Universidad del Cauca
hramo@unicauca.edu.co

Resumen

En la vida del hombre se encuentra que siempre ha estado rodeado de fenómenos naturales. Para entender dichos fenómenos es necesario su modelamiento mediante señales o imágenes, unas con mayor complejidad que otras. Las señales o imágenes requieren ser analizadas en su dominio temporal o espacial y buscando una mayor riqueza de información deberían ser transformadas a otros dominios como el de la frecuencia. Para ello, la teoría de Fourier significó ser la herramienta por excelencia durante casi un siglo desde su invención, hasta que se encontró sus debilidades para el análisis de señales no estacionarias o cambiantes con el tiempo, característica de la mayoría de señales en la naturaleza. Ante esta situación se desarrolla la Teoría de wavelets para complementar el trabajo de Fourier. En este artículo se presenta la historia de esta novedosa y revolucionaria teoría, y sin entrar en la profundidad de su matemática se introducen sus conceptos fundamentales de tratamiento de señales mediante transformaciones wavelets, y finalmente se presentan algunas de sus principales aplicaciones.

Palabras clave: Análisis de señales, teoría de Fourier, teoría de wavelets.

Introducción

La Teoría de wavelets aparece con el siglo XX como herramienta matemática complementaria a la teoría de Fourier, que permite transformar o proyectar una señal temporal o espacial al dominio bidimensional denominado tiempo-escala, en lugar de una simple proyección al dominio de la frecuencia.

Esta proyección permite que ciertas propiedades de interés puedan observarse con mayor detalle de información o realizar un procesamiento de la señal más eficiente.

Sus fundamentos matemáticos se basan en el análisis y síntesis de señales temporales o espaciales mediante la aplicación de las Transformadas wavelet directa e inversa respectivamente. Así, mientras la transformada de Fourier implica una descomposición de una señal en términos de funciones sinusoidales a diferentes frecuencias, la transformada wavelet lo hace en términos de funciones llamadas wavelets a diferentes escalas de resolución, con la diferencia fundamental de que una función sinusoidal es estacionaria y periódica, mientras que una función wavelet es no estacionaria y no periódica, justamente lo que la hace aplicable a señales estocásticas, no periódicas y con cambios abruptos en el tiempo, tal como sucede con la mayoría de señales producidas por los fenómenos de la naturaleza. De esta manera, se habla de la complementariedad de las teorías de Fourier y de wavelets.

La Teoría de wavelets está cobrando cada vez mayor interés en grupos de investigación y desarrollo por sus diversas aplicaciones en campos de la ciencia, medicina, ingeniería, etc. Aplicaciones que van desde el análisis de señales biomédicas para diagnóstico clínico hasta la producción de videos animados de alta definición en el campo cinematográfico.

Reseña histórica

La Teoría de wavelets como tal aparece a mediados del siglo XX, a pesar de que como herramienta matemática experimental estaba concebida muchos años atrás. Apareció como resultado de experimentaciones y descubrimientos aislados, pero que gracias a su efectividad cobró gran interés y tuvo un acelerado progreso a principios de la década de 1980, logrando finalmente consolidarse en una teoría matemática formal. Sin embargo, no se puede hablar de la Teoría de wavelets sin antes mencionar a la Teoría de Fourier, pues fueron justamente los vacíos que esta última dejaba en el análisis de ciertas señales singulares lo que motivo a la construcción de la novedosa Teoría de wavelets. Jean Baptiste Joseph Fourier en 1807 afirmó que cualquier función periódica se puede expresar como una suma infinita de funciones sinusoidales y cosinusoidales denominadas "bases" de distintas frecuencias (Graps, 1995). Esto significó para la ciencia una herramienta de análisis espectral de señales por excelencia durante más de un siglo. No obstante, muchos fenómenos naturales no generan señales periódicas estacionarias, sino transitorias o no estacionarias aperiódicas.

Es ante este hecho, que un siglo más tarde (1909) el matemático húngaro Alfred Haar, descubre una "base" de funciones que se reconocen actualmente como las primeras wavelets, denominadas wavelets de Haar. En 1946, Dennis Gabor, científico británico-húngaro, descubre la forma de analizar (o descomponer) una señal en "paquetes de tiempo-frecuencia", y en 1960, Alberto Calderón, matemático argentino, descubre la forma de sintetizar (o reconstruir) la señal a partir de su descomposición en términos de wavelets (Mackenzie, 2001). Jean Morlet en 1981 trabajaba el análisis de ondas sonoras aplicadas en la búsqueda de depósitos subterráneos de petróleo, cuando descubrió que estas ondas se podían reconstruir a partir de sus descomposiciones en wavelets. De hecho, las transformaciones de wavelets resultaron funcionar mucho mejor que las transformaciones de Fourier, porque eran mucho menos susceptibles a pequeños errores de cómputo. La interpretación geológica en una onda sonora (o viceversa) constituye un problema matemático difícil, que los ingenieros resolvían tradicionalmente mediante el análisis de Fourier. Desafortunadamente, las señales sísmicas contenían gran cantidad de señales transitorias, cambios abruptos en la onda a medida que pasa de una capa de rocas a otra. Estas señales transitorias contienen exactamente la información que buscan los geólogos, es decir, la localización de las capas de rocas, pero el análisis de Fourier extiende esa información espacial por todo el lugar. Entonces nace la necesidad de localizar dicha información y evitar su dispersión. Así fue como Morlet desarrolló su propia forma de analizar las señales sísmicas para crear componentes que estuvieran localizados en el espacio, a los que denominó "wavelets de forma constante". Posteriormente, se conocerían como "wavelets de Morlet". Y así fue como la palabra "wavelet" aparece en 1984 por primera vez en un artículo de publicación científica con autoría de Morlet y Grossmann (Mackenzie, 2001).

Tras demostrar la validez analítica de esta novedosa herramienta por parte de Jean Morlet y el físico Alex Grossmann, afloraron una gran variedad de aplicaciones, lo que motivó a los físicos, matemáticos e ingenieros para formalizar los conceptos de una nueva teoría matemática. Así, en 1985 se reconoce ampliamente a Yves Meyer como uno de los fundadores de la Teoría de las wavelets. Meyer encontró la conexión entre las wavelets de Morlet y las wavelets matemáticas precedentes, fueron 16 redescubrimientos independientes del concepto de wavelets, anteriores a la publicación del artículo de Morlet y Grossman. A Meyer se le atribuye también el concepto de "wavelets ortogonales", características esenciales para el análisis y síntesis de cualquier señal. La "ortogonalidad" significa que la información capturada por una wavelet es completamente independiente de la información capturada por otra. Esto permite además trabajar la transformación wavelets de una forma tan fácil como con la transformación de Fourier.

Un año mas tarde, (1986), Stéphane Mallat, un antiguo alumno de Meyer, vinculó la Teoría de wavelets a la teoría de codificación en subbandas y filtros de duplicación de cuadratura (versiones de las wavelets de la comunidad de procesamiento de imágenes). Otra idea relacionada con wavelets es la del análisis multiresolución, es decir, la observación de señales a distintas escalas de resolución, que ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. Mallat, en colaboración con Meyer, demostró que las wavelets están implícitas en el proceso del análisis multiresolución. Gracias al trabajo de Mallat, las wavelets se convirtieron en algo mucho más sencillo de manejar y su lenguaje resultaba más cómodo para los ingenieros quienes manejaban los conceptos de filtraje.

Finalmente la revolución de las wavelets se disparó en 1987, cuando Ingrid Daubechies descubrió una clase completamente nueva de wavelets, que no sólo eran ortogonales, sino que también podían implementarse mediante sencillas ideas de filtrado digital. Las nuevas wavelets eran suaves, sin los saltos bruscos de las wavelets de Haar. Las wavelets de Daubechies tienen además conexiones estrechas con la teoría de fractales. Es así como hoy en día los procesadores de señales disponen de una herramienta poderosa y sencilla para tratamiento de señales de toda índole (Mackenzie, 2001).

Teoría wavelets

En la teoría de Fourier a pesar de haber tenido éxito durante el siglo XIX, matemáticos, físicos e ingenieros observaron un inconveniente en la transformación de Fourier para reproducir señales fugaces o señales transitorias con cambios abruptos (Mackenzie, 2001). Esto porque los componentes de frecuencia que representan dichos cambios solo se presentan durante breves instantes de tiempo y no de manera permanente como supone una descomposición sinusoidal de Fourier. La solución a este inconveniente planteó la descomposición de la señal a analizar en componentes que no fueran ondas sinusoidales puras y poder condensar la información tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Esta fue la idea que finalmente llevó a concebir las formas de onda denominadas wavelets.

Función Wavelet Haar

La función wavelet Haar fue descubierta y estudiada por el matemático húngaro Alfred Haar, quien descubre una "base" de funciones que se reconocen actualmente como las primeras wavelets, las cuales consisten en un breve impulso positivo seguido de un breve impulso negativo como se muestra en la figura 1a.

Aunque las wavelets de Haar son excelentes para la enseñanza de la teoría de wavelets, no resultan de tanta utilidad en la mayoría de aplicaciones, ya que producen líneas irregulares con picos en lugar de curvas suaves. Por ejemplo, una imagen reconstruida con las wavelets de Haar tiene el aspecto de una pantalla de calculadora barata, y una reconstrucción realizada con wavelets de Haar del sonido de una flauta es demasiado áspera (Mackenzie, 2001).

Es de anotar que a cada función wavelet $\psi(t)$ viene asociada una función escala $\Phi(t)$ y juntas permiten el análisis y la síntesis de una señal. Para el caso de la wavelet Haar, estas funciones están definidas como [3]:

$$\psi\ (t)\begin{cases}1 & si \quad 0\le t\le \frac{1}{2}\\ -1 & si \quad \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 0 & en\ caso\ contrario\end{cases}$$

y

$$\Phi\ \ (t)=\begin{cases}1 & si\ 0\le t<1\\ 0 & el\ resto\end{cases}$$

y se pueden apreciar en la figura 1a y 1b. respectivamente.

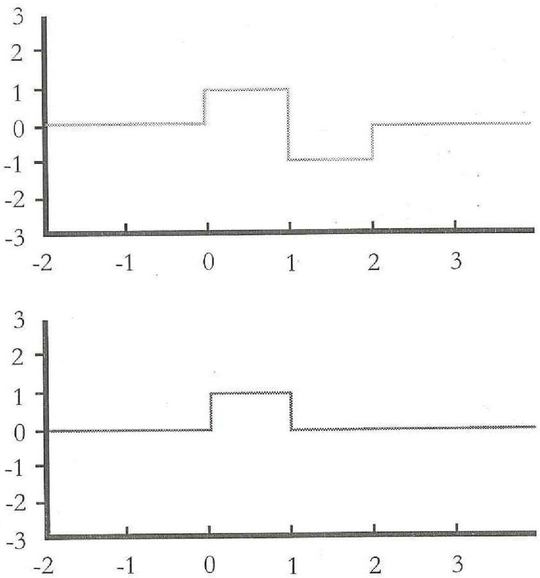

Figura 1a) Función Wavelet de Haar; 1b) Función escala de Haar.

Descomposición Wavelet y el Análisis Multiresolución

La descomposición o transformación wavelet de una señal puede ser comparada con la transformación de Fourier de la siguiente manera: la transformación de Fourier consiste en la descomposición de una señal periódica en términos de funciones sinusoidales y cosinusoidales que resulta en una serie trigonométrica descrita como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(nt) + b_n sen(nt)\} \quad (1)$$

donde a_n y b_n se conocen como los coeficientes de Fourier evaluados mediante las expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sen(nt)dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

Los cuales representan la amplitud de los diferentes componentes de frecuencia presentes en la señal analizada. Por su parte, la Transformación wavelet consiste en la descomposición de cualquier señal en términos de funciones escala Φ(t) y wavelets ψ(t) que resultan en una serie de la forma:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k}\ \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k}\ \psi(t);\ \ j,k \in Z,$$

donde los coeficientes Cj,k y dj,k se conocen como coeficientes de escala (o de aproximación) y coeficientes wavelets (o de detalles) respectivamente, obtenidos mediante las expresiones:

$$c_{j,k} = \langle f(t)\ ,\ \phi_{j,k}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\ \ \phi_{j,k}(t)\right| dt. \qquad (4)$$

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\ \psi_{j,k}(t)\right| dt$$

La función escala Φ(t) también conocida como "wavelet padre" y la función wavelets ψ(t) también conocida como "wavelet madre" tienen la característica de conformar "bases ortonormales" para los subespacios V y W, contenidos en el espacio de funciones de energía finita o cuadrado integrables L^2(R) [3].

Así, para cada j $\in$ Z,$\{\Phi_{j,k} \mid k \in Z\}$ forma una base ortonormal para el subespacio L^2(R) y $\{\psi_{j,k} \mid k \in Z\}$ forma una base ortonormal para el subespacio $W_j \subset L^2$(R). A su vez, los subespacios V_j y W_j están anidados, de tal forma que $V_j \subset V_{j+1}$ y $W_j c W_{j+1}$ como se muestra en la figura 2.

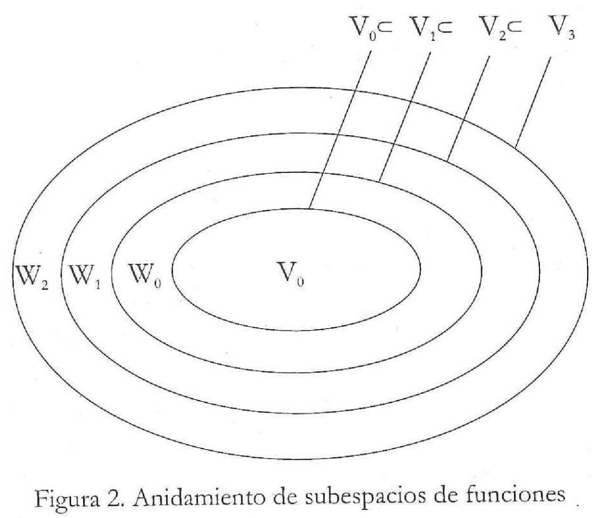

Figura 2. Anidamiento de subespacios de funciones

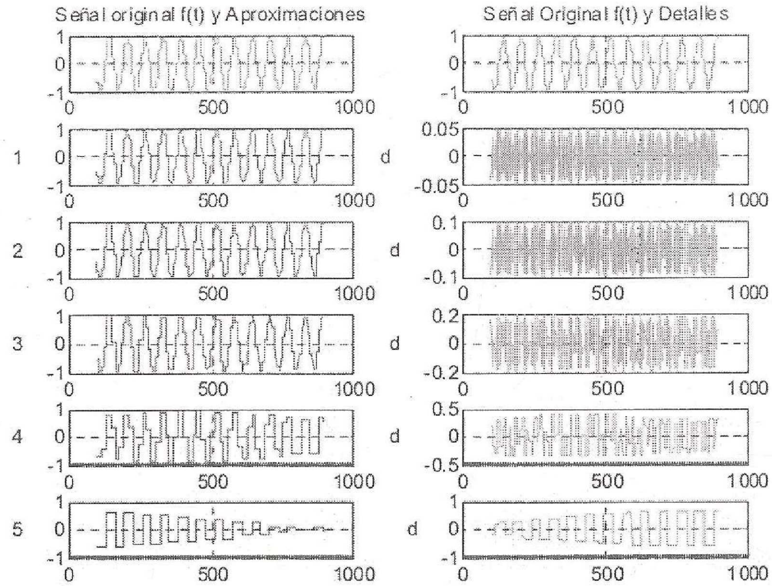

Figura 3. Descomposición wavelet Haar de una señal sinusoidal a 5 niveles.

Además puede verse que $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$, lo que significa que una función f(t) que pertenece al espacio V_{j+1} se puede descomponer en dos secuencias, una de componentes escala del subespacio V_j y otra de componentes wavelets del subespacio W_j. En adelante se puede interpretar la descomposición wavelet como una transformación de una señal en dos señales nuevas, una que consiste en una aproximación de menor resolución a la señal original y la otra que consiste en los detalles extraídos de la señal original para obtener su versión aproximada. El proceso de descomposición puede iterarse hasta el nivel deseado teniendo en cuenta únicamente el nivel de resolución "J" del espacio al que pertenece la señal original f(t), por que según esto el nivel máximo de descomposición será $n=\log_2(J)$ (Daubechies, 1992).

Para ilustrar lo anterior, se muestra en la figura 3 el proceso de descomposición de una simple señal sinusoidal a 5 niveles. A la izquierda se aprecian versiones de aproximación cada vez de menor resolución y a la derecha los detalles extraídos respectivamente de cada versión aproximada.

La forma de análisis o descomposición presentada anteriormente se conoce como "análisis multiresolución" y que gracias a Ingrid Daubechies puede implementarse fácilmente con algoritmos rápidos, mediante bancos de filtros paso-bajas y paso- altas para la obtención de las versiones de aproximación y detalles de la señal. Y los coeficientes de dichos filtros representan a las funciones escala $\Phi(t)$ y wavelets $\psi(t)$ respectivamente. Las funciones escala $\Phi(t)$ y wavelet $\psi(t)$ tienen la siguiente forma:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\phi\ (2^j t - k);\quad j,k \in Z$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi\ (2^j t - k);\quad j,k \in Z \qquad (5)$$

las cuales pueden ser dilatadas o comprimidas según su parámetro "j" y desplazada según el parámetro "k", esto para realizar el análisis de la señal a diferentes niveles de resolución "j" y con el recubrimiento temporal de la señal mediante desplazamientos del parámetro "k" (Daubechies, 1992).

Se puede construir cualquier familia de wavelets según la forma de onda de la señal a analizar y de los propósitos del procesamiento, simplemente adoptando una forma diferente de wavelet madre y dilatándola, comprimiéndola o desplazándola en el tiempo se realiza la transformación wavelet de la señal. Los investigadores descubrirían que la forma exacta de la wavelet madre afecta enormemente a las propiedades de análisis en compresión de señales.

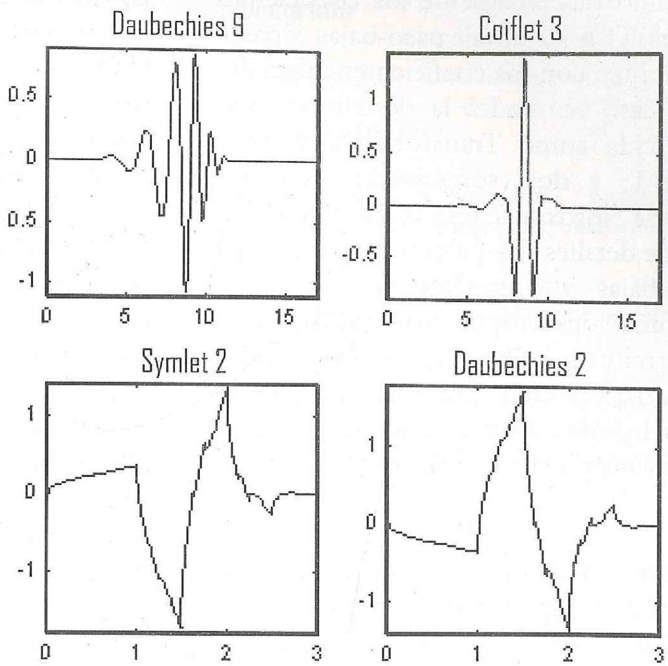

Figura 4. Familias de wavelets más comunes.

En la figura 4 se pueden observar algunas familias de wavelets más comunes de las muchas que existen hoy en día, pero muchas más serán desarrolladas a medida que cada aplicación específica lo requiera.

En la figura 5 se presenta la configuración de los filtros paso-bajas y paso-altas para la descomposición wavelet de primer nivel de una señal f(t), son coeficientes de muestreo original Cn; aquí, 2↓ representa la operación de submuestreo sobre la salida de los filtros con el fin de reducir la longitud de la señal original a la mitad; pues cada filtro separa la mitad del espectro ocupado por la señal original y según el teorema de muestreo de Nyquist será suficiente considerar únicamente la mitad de las muestras para las señales de salida.

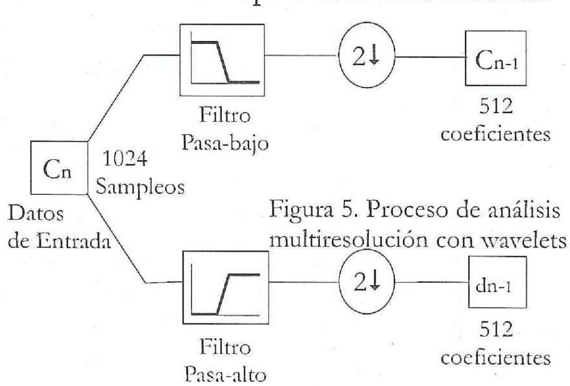

Figura 5. Proceso de análisis multiresolución con wavelets

Transformadas wavelet DWT y WPT

En 1946, Dennis Gabor, un físico británico-húngaro, presentó la transformación wavelet, análoga a la transformación de Fourier, que separa una onda en "paquetes de tiempo-frecuencia" con la mayor localización simultánea posible tanto en tiempo como en frecuencia. Y en las décadas de 1970 y 1980, las comunidades de procesamiento de señales y procesamiento de imágenes presentaron sus propias versiones del análisis de wavelets con nombres tales como "codificación de subbandas", "filtros de duplicación de cuadratura" y "algoritmo piramidal". Aunque no eran exactamente idénticas, todas estas técnicas tenían características similares. Descomponían o transformaban señales en partes que se podían localizar en cualquier intervalo de tiempo y que también se podían dilatar o contraer para analizar la señal a distintas escalas de resolución temporal (Mackenzie, 2001).

En todo caso, el funcionamiento de estos algoritmos consiste en iterar el procedimiento de descomposición a través de los filtros, descrito anteriormente, tantas veces como sea necesario, o dependiendo de los niveles de descomposición requeridos. Esto se puede hacer de dos maneras:

una, sometiendo reiteradamente los coeficientes de aproximación Cn-j al filtraje paso-bajas y paso-altas como se hizo con los coeficientes originales Cn, en este caso se tendrá la descomposición wavelet conocida como Transformada Wavelet Discreta DWT; y dos, sometiendo tanto los coeficientes de aproximación Cn-j como los coeficientes de detalles dn-j al mismo proceso de filtraje paso-bajas y paso-altas descrito. Esto resulta en una descomposición mucho más completa, permite un análisis espectral con mayor detalle, aunque con un mayor costo computacional. A esta forma de descomposición se denomina Transformada de Paquetes Wavelet WPT.

Es importante notar que con cada nivel de descomposición, el espectro de frecuencias de la señal original se divide en dos mitades, con lo que se consigue una localización temporal con mayor resolución de su comportamiento espectral. Esto es deseable cuando la señal tiene un comportamiento estocástico no estacionario como en muchos fenómenos naturales que nos rodean. Esta forma de análisis de señales es aprovechada hoy en día en muchas aplicaciones porque con la simple manipulación de los coeficientes de aproximación o de escala se logran los propósitos deseados como se describe a continuación en algunos ejemplos de sus aplicaciones.

Aplicaciones de las wavelets

Aplicaciones pioneras de la Teoría de wavelets se pueden encontrar en la codificación de señales digitales para su transmisión telefónica en 1976, desarrollada por los físicos de IBM Claude Galand y Daniel Esteban, y el análisis de señales sonoras como lo hizo Morlet en 1981, para ofrecer a los geólogos una mejor forma de encontrar petróleo, localizable mediante ruidos intensos (Mackenzie, 2001).

En adelante las aplicaciones más populares del análisis con wavelets se pueden encontrar en eliminación de ruido y compresión de señales unidimensionales tales como registro bioeléctricos, señales sísmicas, señales eléctricas en comunicaciones, etc. o en señales bidimensionales como imágenes, fotografías, videos, etc. La eliminación de ruido se logra mediante la manipulación (eliminación o aproximación) de los coeficientes wavelets en las diferentes subbandas de descomposición, procurando identificar las componentes de frecuencia que representan las fuentes del ruido contaminante. Por ejemplo, si el ruido es de alta frecuencia basta eliminar los coeficientes de detalle que no sobrepasen cierto umbral de amplitud. En este sentido, el mayor aporte lo realizaron en 1990 David Donoho e Iain Johnstone, con algoritmos para eliminar el ruido de las imágenes, logrando versiones más nítidas que las originales. Por su parte Edgard Adelson y Meter Buró en 1982 fueron los primeros en trabajar en compresión de señales o imágenes. Es necesario aclarar que las wavelets en sí no comprimen señales o imágenes, sino más bien estas lo permiten. Pues tras la transformación wavelet de una señal lo que se obtiene es secuencias de coeficientes que gracias al procesamiento que se realice sobre ellos se consigue la compresión. Y una aplicación directa de sus algoritmos fue la compresión de las bases de datos de huellas dactilares del FBI en 1992 (Mackenzie, 2001. Gonzales, 1996).

Hoy en día se encuentran aplicaciones de algoritmos de compresión en el cine con la producción de largometrajes de animación realizados por computadora. Como la transformación de wavelets es un proceso reversible, es tan fácil las síntesis (construcción a base de wavelets) como el análisis (descomposición en las wavelets que la forman) de una imagen. Esta técnica es conocida como superficies de subdivisión, proceso que consiste un análisis multiresolución inverso. Por ejemplo, para dibujar un personaje animado sólo es necesario especificar la posición de algunos puntos clave, creando una versión de baja resolución del personaje. A continuación la computadora puede realizar un análisis multiresolución inverso, haciendo que el personaje adquiera el aspecto de una persona real y no de una caricatura. Ésto puede observarse en la película Bichos realizada en 1998. Los resultados pueden verse si se compara con las imágenes animadas de las películas Toy Story realizada en 1995 y Toy Story 2 de 1999, con una técnica rudimentaria denominada NURB (siglas en inglés de curvas B racionales no uniformes). Y la próxima aplicación del concepto de superficies de subdivisión será la industria de los videojuegos para lograr cada vez mayor realismo en los personajes (Mackenzie, 2001).

En 1999, la Organización Internacional de Estándares (*International Standards Organization*) aprobó el estándar de compresión de imágenes digital denominado JPEG-2000. Este novedoso estándar utiliza wavelets para comprimir archivos de imágenes en una proporción de 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de la imagen. Hoy en día los navegadores web admiten este nuevo estándar como formato de compresión (Mackenzie, 2001).

Las wavelets en el futuro

Aunque el campo más conocido de las wavelets ha sido la eliminación de ruido y compresión de señales e imágenes, muchos investigadores están interesados en utilizar las wavelets para reconocimiento y clasificación de patrones en la fase de extracción de características descriptoras por la riqueza de información de la que se dispone en una transformación de la señal de su dominio original a un dominio bidimensional tiempo-escala simultáneo.

Este tipo de procesamiento cobra importancia en aplicaciones médicas para detección de enfermedades en placas radiográficas, control de dispositivos de prótesis o de asistencia para discapacitados. En sismología para clasificar eventos sísmicos según los registros de actividad sísmica. Igualmente, las wavelets se utilizan para estudiar las ondas expansivas producidas por una explosión. En la industria sirven para evaluar, clasificar y detectar piezas de fabricación defectuosa, así como en agroindustria para clasificación de productos agrícolas como frutas. Igualmente se espera que la Organización Internacional de Estándares apruebe un estándar basado en wavelets como formato de compresión de audio similar al actual Mp3.

Bibliografía

DAUBECHIES I. "Ten Lectures on Wavelets". CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

GONZALEZ R. y Woods R. "Tratamiento digital de imágenes". Adisson- Wesley Iberoamericana. 1996.

GRAPS A. "An introduction to Wavelets". IEEE Computational Science and Engineering, Summer 1995.

MACKENZIE D. "Wavelets: ver el bosque y los árboles". Artículo para Beyond Discovery®. National Academy of Sciences, diciembre de 2001. Disponible en: Http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-01.html#TopOfPage.