Algoritmos adaptativos y efectos de precisión finita

Pablo Emilio Jojoa
Ingeniero Electrónico - Magister en Ingeniería Electrónica
PhD en Ingeniería Electrónica
Virginia Solarte
Ingeniera Electrónica - Magister en Ingeniería Electrónica

En este artículo se presentan los conceptos teóricos relacionados con los sistemas adaptativos dando lugar a la utilización de filtros adaptativos en un amplio rango de aplicaciones. Posteriormente, ya en el contexto de los algoritmos, se presentan los más comunes incluyendo el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (ARγ), finalizando con una exposición sobre los efectos de precisión finita en este algoritmo.

Palabras claves: Filtros adaptativos, algoritmos adaptativos, efectos de precisión finita.

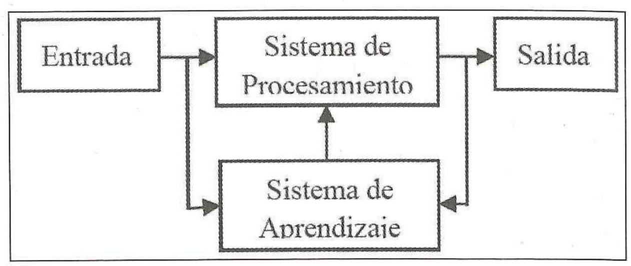
Introducción

En aquellos escenarios en los cuales las características de las señales tienen un comportamiento aleatorio, aún los mejores diseños de sistemas de tratamiento de señales pueden dar lugar a degradaciones; situación que puede mejorarse mediante la utilización de sistemas capaces de adecuarse a un ambiente variable.

Un sistema adaptativo es aquel cuyos parámetros de diseño son alterables o ajustables de acuerdo a algún criterio deseado, de tal forma que su comportamiento o desempeño mejore, proporcionando nuevas capacidades que no se pueden lograr con sistemas de parámetros fijos [2].

La Figura 1 presenta la arquitectura genérica de un sistema adaptativo conformado por un sistema de procesamiento constituido generalmente por un sistema lineal, al que se le superpone una estructura llamada sistema de aprendizaje, la cual observa las condiciones e introduce las modificaciones pertinentes en el sistema de procesamiento [1][2][3].

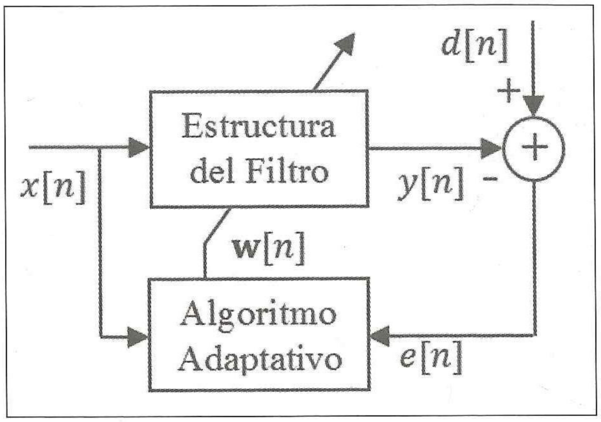
Figura 1. Arquitectura de un Sistema Adaptativo



Los sistemas adaptativos pueden ser entrenados para desempeñar tareas específicas tales como filtraje o toma de decisiones y ofrecen la posibilidad de presentar un mejor desempeño cuando las características de las señales de entrada son desconocidas o variantes con el tiempo.

En el contexto de los sistemas adaptativos, los filtros adaptativos se caracterizan por ser estructuras ajustables que tienen la capacidad de cambiar su respuesta automáticamente para mejorar su desempeño y están compuestos básicamente por dos módulos fundamentales que son la estructura del filtro y el algoritmo, como se puede ver en la Figura 2 [2].

Figura 2. Elementos de un Filtro Adaptativo



La estructura del filtro realiza el procesamiento de la señal de entrada $x[n]$ según los coeficientes $\mathbf{w}[n]$ entregados por el algoritmo adaptativo y este algoritmo es el encargado de tomar las señales de salida del filtro $y[n]$ y compararlas con la señal de respuesta deseada $d[n]$ para evaluar los requerimientos de acuerdo a una aplicación en particular. La estructura del filtro es definida por el diseñador y puede ser una estructura del tipo FIR (*Filtro de Respuesta Finita al Impulso*) o de tipo IIR (*Filtro de Respuesta Infinita al Impulso*), y sus parámetros son ajustados por el algoritmo adaptativo [2].

El algoritmo adaptativo usa el valor del criterio de desempeño o alguna función de él, la señal de entrada y la respuesta deseada para decidir cómo se deben modificar los parámetros del filtro y mejorar su desempeño. La señal de salida del filtro y la señal de respuesta deseada son procesadas por un criterio de desempeño para evaluar la calidad respecto a los requerimientos de una aplicación en particular.

Los algoritmos adaptativos se pueden implementar generalmente en procesos relacionados con identificación de sistemas, inversión de sistemas, seguimiento de señales (predicción de señales) y cancelamiento (eliminación) de interferencias (Mulgrew y Cowan, 1998).

Sus aplicaciones en ingeniería abarcan una amplia gama de campos como sistemas de comunicaciones, filtrado de interferencias, canceladores de eco telefónico y acústico, sistemas de control, identificación de sistemas, sistemas de navegación, sismología, ingeniería biomédica, entre otras (Marques, 1998).

Algoritmos adaptativos

Para la operación de un filtro adaptativo se ha desarrollado una amplia variedad de algoritmos. Los factores determinantes para escoger uno u otro algoritmo son [1]: velocidad de convergencia, desajuste, tracking, robustez, requerimientos computacionales, estructura y propiedades numéricas.

En la actualidad existe una gran variedad de algoritmos adaptativos siendo los más conocidos los algoritmos LMS (*Least Mean Squared*) y NLMS (*Normalized Least Mean Squared*), el de Mínimos Cuadrados Recursivo (RLS, *Recursive Last Squares*) y sus variantes y el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (ARγ). El algoritmo LMS fue propuesto por Widrow y Hoff en el año 1960, es un importante miembro de la familia de algoritmos de gradiente estocástico, ampliamente utilizado debido a su simplicidad.

Considerándose el caso de la identificación de un sistema, en donde a través del algoritmo adaptativo se busca determinar el modelo que rige el comportamiento de un sistema desconocido, la señal de entrada $x[n]$ se introduce simultáneamente al sistema desconocido el cual genera la señal deseada $d[n]$ y al filtro adaptativo generando así una señal de salida $y[n]=\mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[n]$, donde $\mathbf{x}[n]$ es un vector formado por elementos de $x[n]$. Por medio de un proceso de adaptación, el filtro realiza el ajuste automático de los coeficientes $\mathbf{w}$[n], teniendo como base la señal de error $e[n]$ que es obtenida a través de la comparación de la señal de salida del filtro con la señal deseada: $e[n]=d[n]-y[n]$. Con el objetivo de obtener un error $e[n]$ mínimo, el algoritmo LMS procura minimizar la función de costo $J(\mathbf{w}[n])=E|e[n]|^2$, ajustando sucesivamente los coeficientes del filtro en la dirección opuesta al vector gradiente $\nabla J(\mathbf{w}[n])$ (Marqués, 1998), [4][8][9]. Finalmente las ecuaciones que describen este algoritmo son:

$$e[n] = d[n] + r[n] - \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[n]\,, \qquad (2.1)$$
$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu\mathbf{x}[n]e[n] \qquad (2.2)$$

donde [1]: $r[n]$ es un ruido de medida y μ es el parámetro de ajuste fijo. La importancia práctica de los filtros LMS es su simplicidad de implementación, siendo su mayor limitación la relativa baja velocidad de convergencia para mantener la estabilidad.

Por otro lado, a partir del análisis de mínimos cuadrados en el cual se minimiza de forma determinística la suma de los cuadrados de errores parciales, se deriva el algoritmo RLS (*Recursive Least Square*) (Marqués, 1998). El algoritmo RLS en un entorno estacionario presenta una velocidad de convergencia de un orden de magnitud mayor que el algoritmo LMS, siendo sus desventajas la mayor exigencia computacional y los problemas de inestabilidad [1]. El algoritmo RLS utiliza la ganancia de Kalman $k[n]$ para hallar su solución, el cual se basa en la matriz de auto correlación de datos y de la matriz $P(n)$ (Ecuación de Ricatti)[1], (Lennart, 1999), (Escobar, 2003):

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n]\varepsilon^*[n] \quad (2.3)$$
$$\mathbf{k}[n] = \frac{\mathbf{P}[n-1]\mathbf{x}[n]}{\lambda + \mathbf{x}^H[n]\mathbf{P}[n-1]\mathbf{x}[n]} \quad (2.4)$$
$$\mathbf{P}[n] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[n-1] - \lambda^{-1}\mathbf{k}[n]\mathbf{x}^H[n]\mathbf{P}[n-1] \quad (2.5)$$

donde

$\varepsilon[n] = d[n] - \mathbf{w}^H[n-1]\mathbf{x}[n]$, y λ el factor de olvido.

En 1998, fue propuesto por F. Pait [5], el Algoritmo Acelerador de Tiempo Continuo que consistió en el ajuste de la segunda derivada (aceleración) del error con respecto a los coeficientes del algoritmo. La principal característica analizada fue el mejor compromiso entre la velocidad de convergencia y la variación del error de estimación, en relación a los algoritmos de gradiente estocástico [5]. Este algoritmo fue digitalizado y con el objetivo de disminuir la complejidad computacional del algoritmo se llegó a obtener el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ, el cual presenta tres parámetros escalares de ajuste denominados α, γ y m_1 por medio de los cuales se logra una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final [6]. Las ecuaciones que describen el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ son:

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}[n-1] - d[n] \quad (2.6)$$
$$g[n] = \frac{e[n] + \gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]m_1\mathbf{x}[n]} \quad (2.7)$$
$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n]m_1\mathbf{x}[n] \quad (2.8)$$
$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n] \quad (2.9)$$

De acuerdo al análisis de convergencia con respecto a la media [4], se establece que el algoritmo converge para valores de α, γ y m_1 positivos. Así mismo del análisis se determinó que éste presenta un mínimo error de desajuste cuando $\alpha\gamma m_1 \approx 2$ (Criterio de Mínimo Error).

Efectos de precisión finita en los algoritmos adaptativos.

El análisis matemático presentado para los diferentes algoritmos asume un modelo de tipo analógico, es decir, de precisión infinita tanto para los datos de entrada como para los cálculos internos del algoritmo. Sin embargo, esta teoría no es aplicable a la construcción de un filtro adaptativo real ya que proporciona un marco idealizado. El estudio sobre los algoritmos adaptativos quedaría incompleto sin una discusión sobre los efectos de cuantificación o redondeo; errores que surgen cuando los filtros se implementan en un sistema real. En particular, para la implementación de un filtro con un algoritmo adaptativo, los datos de entrada y los cálculos internos son cuantizados para efectos de precisión finita, situación determinante para consideraciones de diseño y costo.

De esta forma, el proceso de cuantización tiene el efecto de generar un impacto en el rendimiento del algoritmo, inclusive; desviando los resultados de los obtenidos en la teoría, siendo los factores más trascendentales los detalles de diseño del algoritmo, el grado de efectos negativos a nivel de las características de la matriz de correlación de los datos de entrada y la forma de computación numérica empleada (por ejemplo punto fijo o punto flotante) [1][7].

De esta manera, es importante entender las propiedades numéricas de los algoritmos adaptativos y en particular del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ, ya que así se pueden encontrar muchas especificaciones de diseño al analizar el efecto de la limitación de valores obteniendo patrones de comportamiento trascendentales para futuras implementaciones en hardware que pueden representar costos operacionales substancialmente menores y niveles de consumo de potencia pequeños.

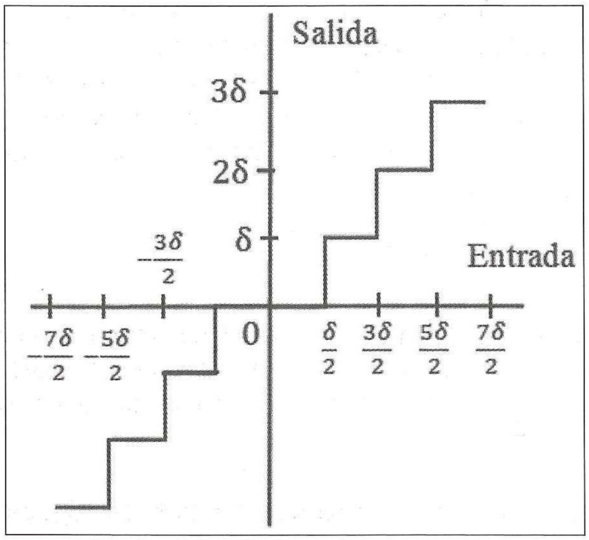
Errores de cuantización

En la implementación de un filtro adaptativo se tienen dos fuentes de error de cuantización [1]:

A. *Conversión analógica – digital.* Considerando que los datos de entrada son de forma analógica, se requiere de un conversor analógico digital para realizar la representación numérica. En un proceso de cuantización se asume un paso δ, y un conjunto de niveles de cuantización posicionados en $0, \pm\delta, \pm 2\delta$ como se ilustra en la Figura 4. Considere una muestra particular en la entrada del cuantizador, con una amplitud que varía en el rango $r\delta - (\delta/2)$ a $r\delta + (\delta/2)$, donde r es un entero (positivo, negativo o cero) y $r\delta$ define la salida del cuantizador, el proceso de cuantización introduce una región de incertidumbre de ancho δ, centrado en $r\delta$.

Definiendo η como el error de cuantización, la entrada del cuantizador será $r\delta + \eta$, donde $-(\delta/2) \leq \eta \leq \delta/2$. Mientras el cuantizador es lo suficientemente bueno (es decir que los niveles de cuantización son 64 o más) y el espectro de la señal es lo suficientemente rica, la distorsión producida por el proceso de cuantización puede ser modelada como una fuente aditiva independiente de ruido blanco con media cero y varianza determinada por el tamaño del paso δ del cuantizador (Gray, 1990).

Figura 3. Característica entrada salida de un cuantizador uniforme



Asumiendo que la entrada del cuantizador tiene una escala apropiada, tal que se encuentra en el intervalo (-1,+1] , con B bits, el paso del cuantizador es $\delta=2^{-B}$, y el error de cuantización resultante de la representación de la entrada analógica de datos tiene la varianza $\sigma^2=2^{-2B}/12$.

B. *Aritmética de longitud de palabra finita.* En una máquina digital, la longitud de palabra finita es utilizada para almacenar los resultados de los cálculos internos. Asumiendo que no se presenta desbordamiento durante el cómputo, las sumas no introducen ningún error utilizando aritmética de punto fijo, mientras que cada multiplicación introduce un error después de que cada producto es cuantizado.

La presencia de aritmética de palabra finita, representa un serio problema en la implementación de un filtro adaptativo, particularmente en lo relacionado con el peso de los coeficientes del filtro que son actualizados en una base continua. La versión digital del filtro muestra una respuesta específica de tales errores causando una desviación de la respuesta ideal. Inclusive, el filtro puede llegar a una condición de "overflow", generando un algoritmo numéricamente inestable.

Otro aspecto importante en la implementación de un filtro adaptativo es la precisión, que depende del número de bits usados para implementar los cálculos internos del filtro.

Efectos de precisión finita para el algoritmo ARγ.

Para el análisis sobre los efectos de precisión finita del Algoritmo Acelerador Regresivo, versión γ, se tiene que la señal de entrada cuantizada es de la forma:

$$x_q[n]=Q[x[n]] \quad =x[n]+\eta_x[n]$$

donde $\eta_x[n]$ corresponde al vector de entrada de error de cuantización. La respuesta deseada $d[n]$ una vez cuantizada viene dada por:

$$d_q[n]=Q[d[n]]=d[n]+\eta_d[n]$$

siendo $\eta_d[n]$ el error de cuantización de la respuesta deseada. De igual forma se tiene que la cuantización del vector $\mathbf{w}_q[n]$ es

$$\mathbf{w}_q[n]=Q[\mathbf{w}[n]] \quad =\mathbf{w}[n]+\Delta\mathbf{w}[n],$$

en donde $\mathbf{w}[n]$ es el vector en precisión infinita y $\Delta\mathbf{w}[n]$ es el vector del error resultante de la cuantización. Ahora, la salida del filtro es

$$y_q[n] = Q\left[\mathbf{x}_q^T[n]\mathbf{w}_q[n-1]\right] \quad = \mathbf{x}_q^T[n]\mathbf{w}_q[n-1] + \eta_y[n]$$

De esta forma, la precisión finita en el Algoritmo ARγ está descrita por:

$$e_q[n] = y_q[n]-d_q[n]$$

y

$$\mathbf{w}_q[n] = Q\{\mathbf{w}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n]\},$$

equivalente a decir:

$$\mathbf{w}_q[n] = \mathbf{w}_q[n-1] + \eta_{wq(n-1)} + \alpha Q\{\mathbf{q}[n]\}.$$

Ya que α, γ y m_1 son constantes

$$Q[\mathbf{q}[n]] = Q\left\{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n]\mathrm{m}_1 x[n]\right\}$$
$$\mathbf{q}_q[n] = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}Q\{\mathbf{q}[n-1]\} - \alpha\mathrm{m}_1 Q\{g[n]\mathbf{x}[n]\}$$

donde $Q\{g[n]\mathbf{x}[n]\} = g_q[n]\,\mathbf{x}_q[n]\,\Delta_{gx}[n]$, con

$$g_q[n] = Q\left\{\frac{e[n] + \gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathrm{m}_1\mathbf{x}[n]}\right\}$$

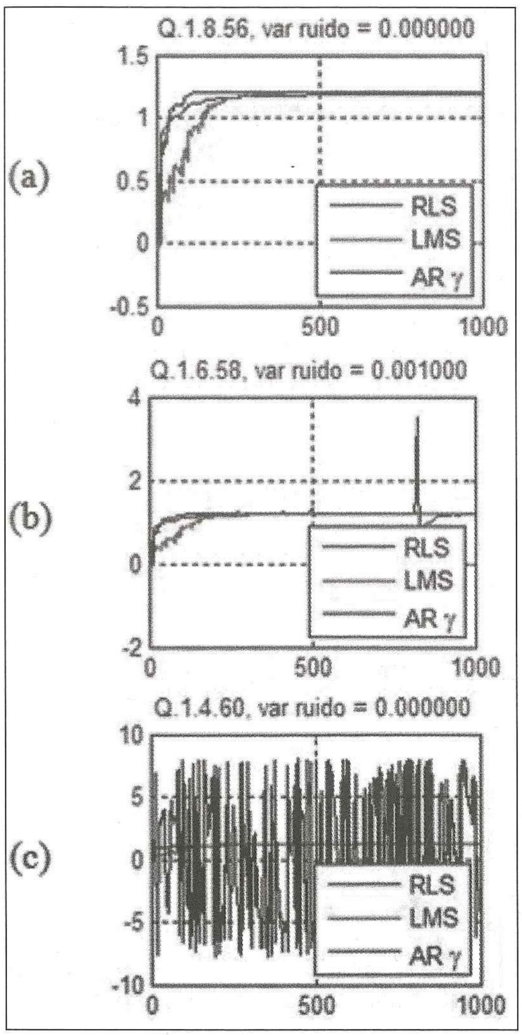
$$g_q[n] = e_q[n]+\gamma Q\{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]\}\,\{1+\alpha\gamma m_1 Q[\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]]\}^{-1}$$

Como se ha podido observar a lo largo del análisis realizado cada operación de cuantización introduce un valor de ruido de cuantización que es acumulativo.

Ejemplo de los efectos de precisión finita sobre los algoritmos adaptativos.

De manera experimental, se estudió un Sistema de Identificación usando un Filtro IIR y utilizando los diferentes algoritmos adaptativos mencionados anteriormente, observando que en la medida que se limita el tamaño de la palabra se incrementa la varianza del error de predicción y se afecta la velocidad de convergencia. La Figura 4 muestra la región de convergencia de los coeficientes para los algoritmos LMS, RLS y ARγ con diferentes tamaños de palabra, 1000 muestras y 4 coeficientes.

Figura 4. Región de convergencia de un coeficiente para los algoritmos LMS, RLS y ARγ con palabras de tamaño 64 bits con 8, 6 y 4 bits en la parte entera: a) Q.1.8.56, b) Q.1.6.58, c) Q.1.4.60 usando un filtro IIR.



En esta experiencia, se observa que el algoritmo entró en "overflow" cuando se limitó a 4 la cantidad de bits en la parte entera.

Conclusión

Con la implementación de los algoritmos utilizando una estructura IIR se observa que el número mínimo de bits en la parte entera para que el algoritmo se comporte de manera adecuada es de 6 usando una configuración IIR, así el problema de divergencia del ARγ se debe a insuficiencia en el número de bits utilizados para representar la parte entera.

Agradecimientos

Se exalta el compromiso de la Universidad del Cauca para hacer de la investigación un eje fundamental en proceso de crecimiento institucional y personal de los miembros de la comunidad.

Este trabajo es resultado de los procesos de investigación llevados a cabo al interior del Grupo de Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca, donde se realizan estudios que contribuyen al fortalecimiento del área de la Electrónica y las Telecomunicaciones.

Bibliografía

[1] HAYKIN, S. Adaptive Filter Theory, Fourth Edition, Upper Saddle River, Prentice Hall, USA, 2002.

[2] MANOLAKIS, D. Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing. McGraw Hill, USA, 2000.

[3] WIDROW, B., STEARNS,S. Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, Prentice Hall, USA, 1985.

[4] JOJOA P. Um Algoritmo Acelerador de Parâmetros, Tese apresentada Descola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doctor Em Engenharia, Brasil, 2003.

[5] PAIT, F. A Tuner that Accelerates Parameters, Systems & Control Letters 35, Brasil, 1998.

[6] GERKEN F., PAIT F., JOJOA P. Sobre o Algoritmo Acelerador para Filtragem Adaptativa, Brasil, 2000.